Anhang A

Entfaltung des Gamma-Zählratenspektrums

Die Messungen im γ–Bereich stammen vornehmlich von Satellitenexperimenten, die auf der Verwendung von Szintillationsdetektoren beruhen. Wegen der komplexen Antwortfunktion dieser Detektoren ist die Entfaltung von Pulshöhenspektren im allgemeinen nicht trivial.

Es gibt prinzipiell zwei Wege, um das Problem zu lösen: Entweder es gelingt, die Abbildungsfunktion aus dem Datenraum in den realen Raum zu finden (hierzu zählen alle Matrixinversionsverfahren), so daß sich die entfalteten Spektren aus einer Rückwärtsfaltung ergeben. Oder es werden *a priori* Modelle in einem iterativen Prozeß mit der Antwortfunktion gefaltet und an die Meßdaten angepaßt (hier sind vor allem die Maximum Likelyhood Methode und die Maximum Entropie Methode zu nennen). In jedem Fall läßt sich oft keine eindeutige Lösung finden, sondern das Ergebnis hängt von den gewählten Randbedingungen der Methode ab.

Bei der Entfaltung der COMPTEL Teleskop-Daten bringt die Abbildungseigenschaft des Instruments eine entscheidende Verbesserung: Da der Ort der Quelle in diesem Fall bekannt ist, kann durch beschränkung des ARM-Winkels auf wirkliche Photopeak-Ereignisse selektiert werden (vgl. Kapitel 3, Abschnitt 3.4.2). Es ist daher möglich, die Antwortfunktion in Matrixform zu invertieren. Wegen der starken Unterdrückung der Nicht-Diagonalelemente durch die ARM-Selektion liefert bereits eine einfache Entfaltung mit einer diagonalisierten Matrix verwertbare Resultate. Diese Methode kann zur Überprüfung der numerischen Stabilität der Entfaltung verwendet werden.

Entwicklung nach Singulären Funktionen

Die Methode der Entwicklung nach Singulären Funktionen (*Singular Value Decomposition*, SVD) ist eine Möglichkeit, eine numerisch instabile Matrix zu invertieren (siehe z.B. Press *et al.*, 1986). Ihre Eignung zur Inversion von γ–Spektren ist bereits von Marschhäuser (1992) an Daten von SMM-GRS demonstriert worden. Numerisch instabil bedeutet in diesem Zusammenhang, daß die lineare Abhängigkeit von Matrixspalten in der Antwortfunktion ausreicht, um bei der Inversion das Ergebnis durch Rundungsfehler zu verfälschen.

Es kann gezeigt werden, (siehe Lehrbücher über lineare Algebra, z.B. Stoer & Bulirsch, 1980, oder Wilkinson & Reinsch, 1971), daß jede M$\times$N Matrix **A** auf die Form

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{W}\mathbf{V}^{\mathbf{T}} \tag{A.1}$$

gebracht werden kann. Dabei haben die drei Matrizen folgende Eigenschaften: **U** und **V** sind Spalten-orthogonal, **V** ist außerdem Zeilen-orthogonal. **W** ist eine Diagonalmatrix, die die Eigenwerte der Matrix **A** enthält. Diese Zerlegung kann immer durchgeführt werden, unabhängig davon, wie numerisch singulär **A** ist. Speziell für eine N$\times$N Matrix, wie sie hier verwendet wird, kann die Inverse sofort als

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{V}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{U}^{\mathbf{T}} \tag{A.2}$$

angegeben werden. Bisher unterscheidet sich das Resultat nicht von einfacheren Methoden. Die Zerlegung nach Gl. A.1 ermöglicht jedoch eine Beschreibung des Problems und auch die Auffindung einer stabilen Lösung.

Zu numerischen Problemen kommt es, wenn durch eine zu starke lineare Abhängigkeit zweier Spalten sehr kleine Eigenwerte w_{ii} auftreten. Sie können bei der Inversion das Ergebnis durch numerische Rundungsfehler verfälschen.

Bei der Entfaltung durch die SDV-Methode wird nun für alle Eigenwerte unterhalb einer festgelegten Grenze der Wert von $1/w_{ii}$ zu Null gesetzt. Damit werden bestimmte Linearkombinationen eliminiert, nämlich genau diejenigen, für welche die von den Rundungsfehlern verursachten Fluktuationen in die Größenordnung des Meßsignals kommen.

Die Nicht-Eindeutigkeit ist bei dieser Methode durch die freie Wahl der Grenze für die Elimination von Eigenvektoren gegeben.

Um einen geeigneten Wert festzulegen, wird das SVD-Spektrum mit einem Spektrum verglichen, das mit Hilfe einer diagonalisierten Matrix entfaltet worden ist.

Für die Entfaltung der Spektren wird eine nicht-lineare Einteilung in Energiebänder (binning) vorgenommen. In Bereichen, in denen Linienemission erwartet wird, werden die Energieintervalle gemäß der Energieauflösung des Instruments definiert. Im Bereich von Kontinuum ist die Breite der Intervalle größer. Besonders oberhalb der nuklearen Linien wird der Fluß in drei Intervalle aufgeteilt, um noch signifikante Aussagen zu erhalten.

Dieses großzügige binning zusammen mit der vorselektierten Antwortfunktion ermöglichen eine problemlose Entfaltung der Spektren. Beispiele der Entfaltung sind in Abbildung 5.8 auf Seite 74 gezeigt.